Tema 6 Probabilidad

0.-Introducción

La probabilidad de un suceso es un número, comprendido entre 0 y 1, que indica las posibilidades que tiene de verificarse cuando se realiza un experimento aleatorio.

1. Tipos de experimentos

1.1. Experimentos deterministas

Son los experimentos de los que podemos predecir el resultado antes de que se realicen.

Ejemplo

Si dejamos caer una piedra desde una ventana sabemos, sin lugar a dudas, que la pelota bajará.

1.2. Experimentos aleatorios

Son aquellos en los que no se puede predecir el resultado, ya que éste depende del **azar**.

Ejemplos

Si lanzamos una moneda no sabemos de antemano si saldrá cara o cruz.

2. Teoría de probabilidades

La teoría de probabilidades se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento **aleatorio**, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro. Con este fin, introduciremos algunas definiciones:

Suceso: es cada uno de los resultados posibles de una experiencia aleatoria.

Por ejemplo:

· En la experiencia aleatoria “lanzar una moneda”, un suceso es “salir cara”.

Espacio muestral: es el conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, lo representaremos por E (o bien por la letra griega Ω).

Por ejemplo:

· En la experiencia aleatoria “lanzar una moneda”, el espacio muestral es

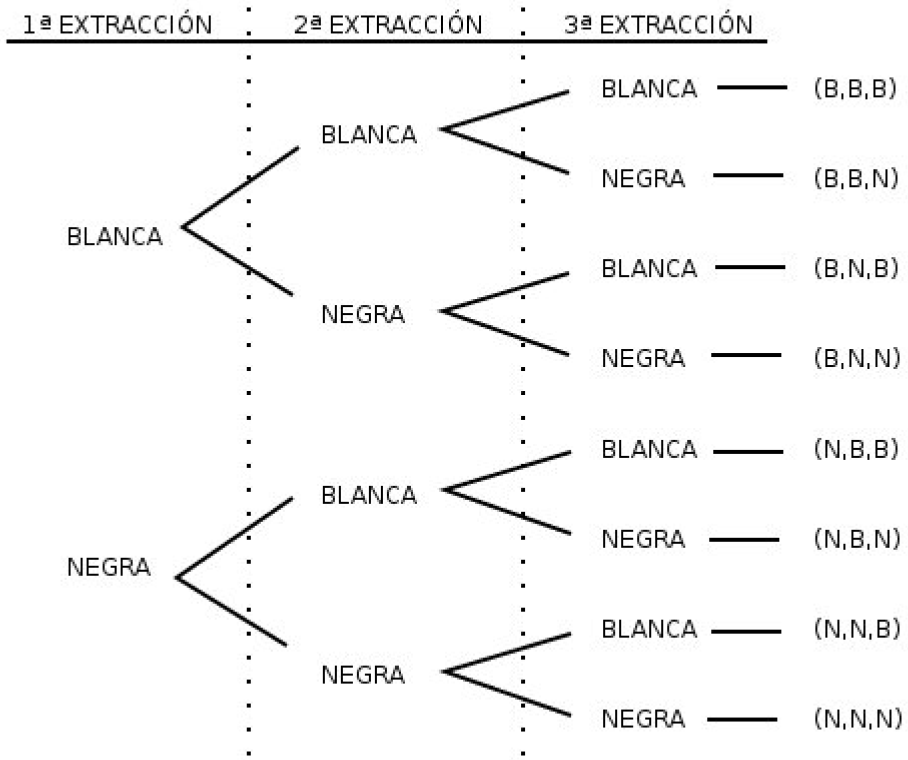
E = {C, X}.

<u>Suceso aleatorio</u> es cualquier subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, sucesos aleatorios al experimento "lanzar un dado" serían:

- salir par: ya que $\{2,4,6\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$
- obtener múltiplo de 3: al ser $\{3,6\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$

Ejemplo Una bolsa contiene bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcular:

1. El espacio muestral: podemos obtenerlo utilizando un diagrama de árbol



Resultando:

$$E = \{ (b,b,b) ; (b,b,n) ; (b,n,b) ; (b,n,n) ; (n,b,b) ; (n,b,n) ; (n,n,b) ; (n,n,n) \}$$

2. El suceso A = {extraer tres bolas del mismo color}.
   B = {(b,b,b); (n, n,n)}

3. El suceso A = {extraer al menos una bola blanca}.
   B= {(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (n,b,b); (b,n,n); (n,b,n); (n,n ,b)}

4. El suceso A = {extraer una sola bola negra}.
   A = {(b,b,n); (b,n,b); (n,b,b)}

Ejercicios

1. En una urna hay 2 bolas blancas y 3 negras. Escribe el espacio muestral asociado a los experimentos: a) extraer una bola, b) extraer dos bolas.

   Si llamamos B=Sale blanca y N=Sale negra, será:

   a) E={B,N}

   b) E={(B,B),(B,N),(N,B),(N,N)}

2. Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Escribir el espacio muestral cuando:

   a.-La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.

   E = {BB, BR, BV, BN, RB, RR, RV, RN, VB, VR, VV, VN, NB, NR, NV, NN}

   b.-La primera bola no se devuelve

   E = { BR, BV, BN, RB, RV, RN, VB, VR, VN, NB, NR, NV}

3. Tipos de sucesos

3.1. Suceso elemental.- es cada uno de los elementos que forman parte del espacio muestral.
Por ejemplo al tirar un dado un suceso elemental es sacar 5.

3.2. Suceso compuesto.- es cualquier subconjunto del espacio muestral.
Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3.

3.3. Suceso seguro, *E*.- está formado por todos los posibles resultados (es decir, por el espacio muestral).
Por ejemplo al tirar un dado un dado obtener una puntuación que sea menor que 7.

3.4. Suceso imposible, , *Ø* .-es el que no tiene ningún elemento.
Por ejemplo al tirar un dado obtener una puntuación igual a 7.

3.5. Sucesos compatibles.- Dos sucesos, A y B, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.
Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 3, A y B son compatibles porque el 6 es un suceso elemental común.

3.6. Sucesos incompatibles.- Dos sucesos, A y B, son incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común.
Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 5, A y B son incompatibles.

3.7. Sucesos independientes.- Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.
Al lazar dos dados los resultados son independientes.

3.8. Sucesos dependientes.- Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B.
Extraer dos cartas de una baraja, sin reposición, son sucesos dependientes.

3.9. Suceso contrario.- El suceso contrario a A es otro suceso que se realiza cuando no se realiza A., Se denota por $\bar{A}$.
Son sucesos contrarios sacar par e impar al lanzar un dado.

Ejemplo.-

En los siguientes ejemplos utilizaremos una baraja española, es decir, una baraja de 40 cartas

Experimento: *"sacar una carta de una baraja española";*

Espacio muestral será: $E = \{las\ 40\ cartas\ de\ la\ baraja\}$
Suceso: *"salir el as de bastos"*
Es un suceso es elemental, ya que incluye a un único elemento del espacio muestral.

Suceso *A*: *"salir el as de oros o la sota de bastos"*
Suceso *B*: *"salir un as"*
Suceso *C*: *"salir una carta de copas"*

Los tres sucesos son compuestos, ya que todos constan de más de un elemento del espacio muestral.

Los sucesos *A* y *B* son compatibles

Los sucesos *B* y *C* son compatibles

Los sucesos *A* y *C* son incompatibles

El suceso contrario al suceso *B* será *"no salir un as"*, y se denotará de la forma: $\bar{B}$

El suceso contrario del suceso *C* es: $\overline{C}$ = *"no salir una carta de copas"*.;

Suceso seguro es: *"cualquier carta";*

Suceso imposible es: *"ninguna carta"*

Experimento: realizar una extracción de la baraja, anotar el resultado y volver a introducir la carta en la baraja, realizar entonces una segunda extracción y anotar el resultado. En este caso el espacio muestral está formado por parejas de cartas.

Suceso *A*: *"salir el as de bastos en la primera extracción"*
Suceso *B*: *"salir el as de bastos en la segunda extracción"*
Los sucesos *A* y *B* son independientes

Experimento: realizar una extracción de la baraja, y a continuación realizar una segunda extracción y anotar el resultado de ambas. En este caso el espacio muestral está formado por parejas de cartas, pero notar que los dos elementos de la pareja deben ser distintos.

Suceso *A*: *"salir el as de bastos en la primera extracción"*
Suceso *B*: *"salir el as de bastos en la segunda extracción"*

Los sucesos son dependientes, ya que si ocurre *A*, es decir, sale el as de bastos en la primera extracción, no puede ocurrir el suceso *B*

3.- Espacio de sucesos

Espacio de sucesos, S, es el conjunto de todos los sucesos aleatorios.

Si tiramos una moneda el espacio se sucesos está formado por:

S= { , {C}, {X}, {C,X}}.

Si E tiene un número finito de elementos, n, de elementos el **número de sucesos** de E es 2^n .

Ejemplo
Tenemos tres bolas, una roja, otra verde y una azul.

Espacio muestral E= {R, V, A}

El espacio de sucesos S = $2^3 = 8$ S = {(R), (V),(A), (R V A), (R V), (R A), (V A), (Ø)}

4.- Unión de sucesos

La **unión de sucesos, A U B**, es el suceso formado por todos los elementos de A y de B.

Es decir, el suceso A U B se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos.

A U B se lee como "**A o B**".

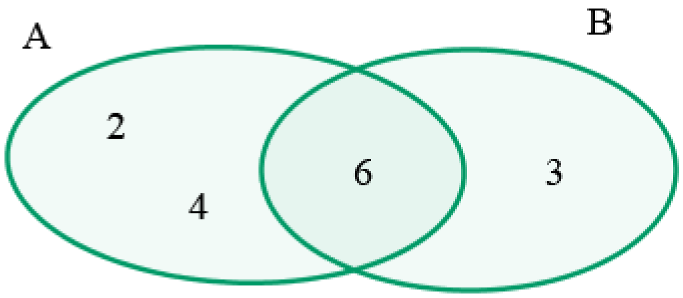
Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular A U B.

A = {2, 4, 6}

B = {3, 6}

A U B = {2, 3, 4, 6}



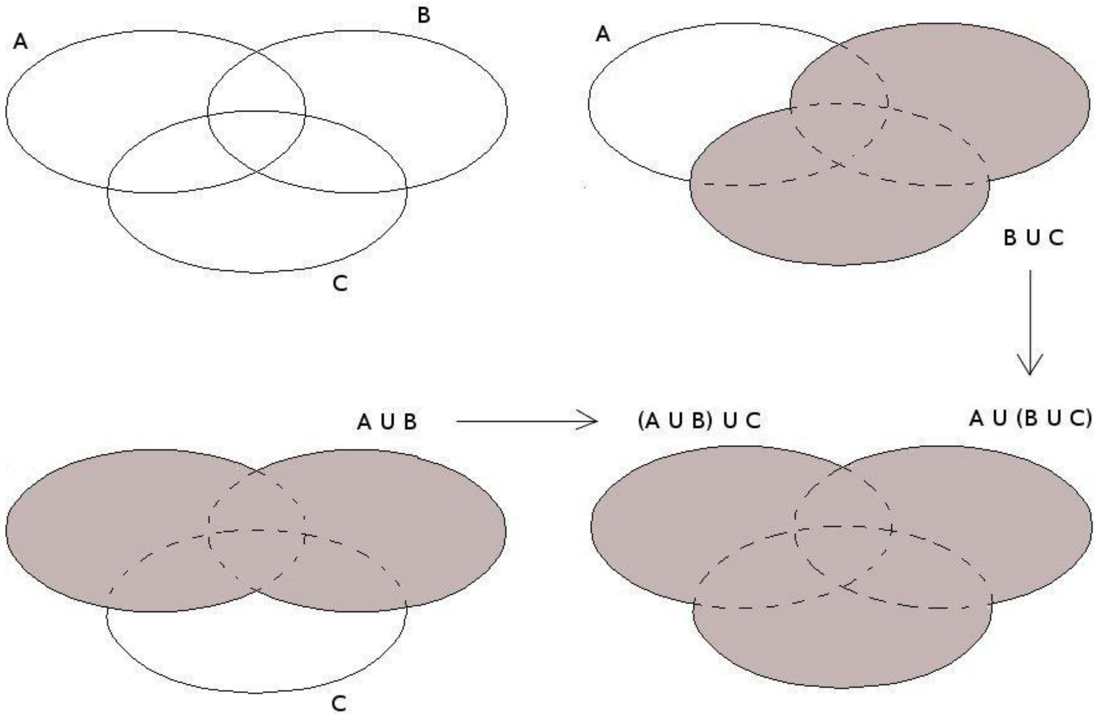
5.1. Propiedades de la unión de sucesos

A.- Conmutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

B.- Asociativa

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

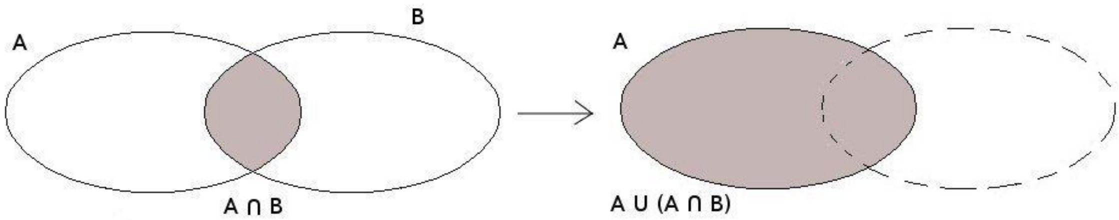


C.- Idempotente

$A \cup A = A$

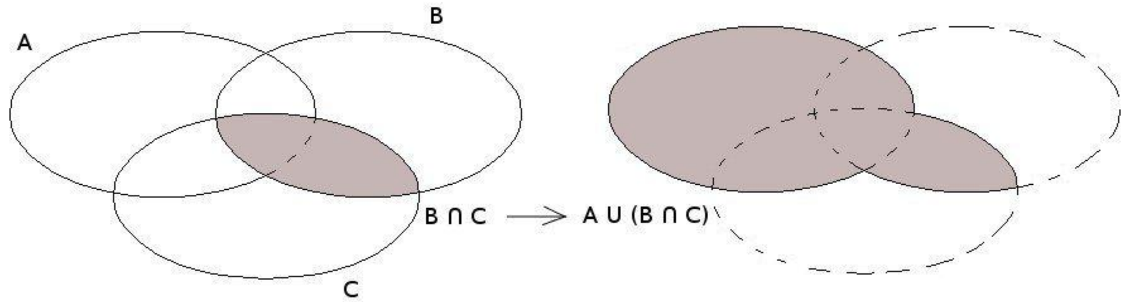
D.- Simplificación

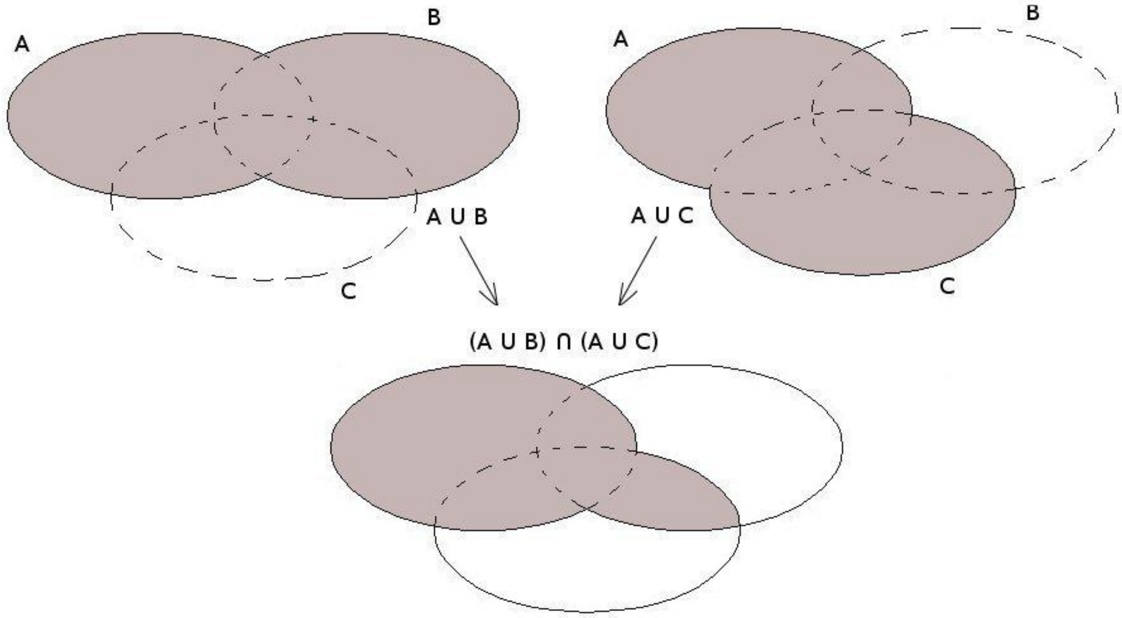
$A \cup (A \cap B) = A$



E.- Distributiva

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$





F.- Elemento neutro

A U Ø = A

G.- Absorción

A U E = A   Si E € A

6. Intersección de sucesos

La **intersección de sucesos, A ∩ B**, es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y B.

Es decir, el suceso A B se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B.

A ∩ B se lee como "**A y B**".

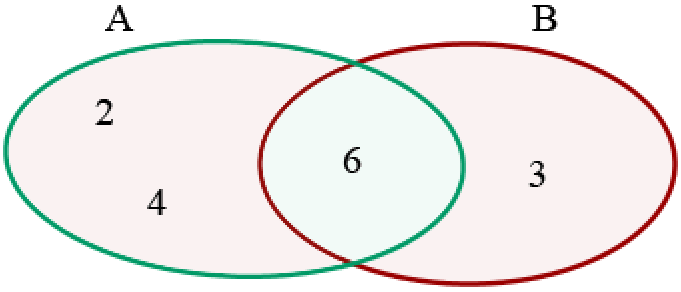
Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular A ∩ B.

A = {2, 4, 6}

B = {3, 6}

$A \cap B = \{3\}$



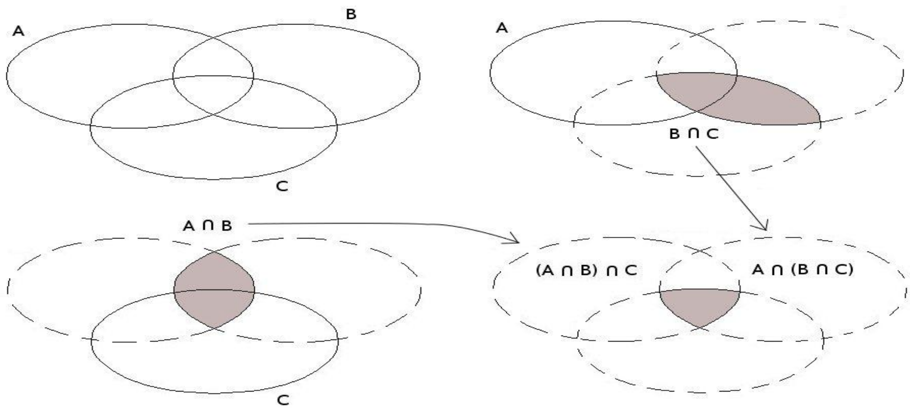
6.1. Propiedades de la intersección de sucesos

Conmutativa

$A \cap B = B \cap A$

Asociativa

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

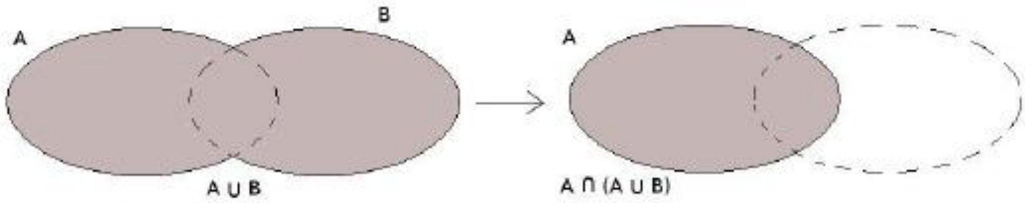


Idempotente

$A \cap A = A$

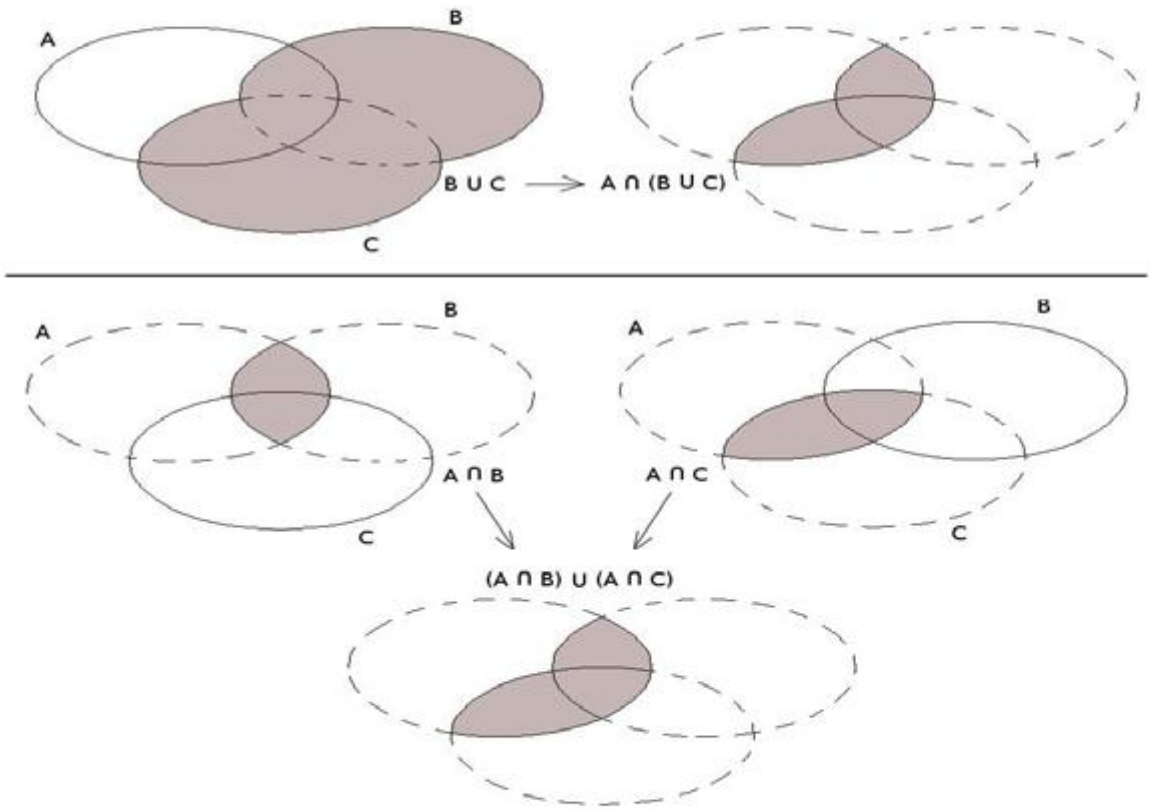
Simplificación

$A \cap (A \cup B) = A$



Distributiva

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



Elemento neutro

$$A \cap \emptyset = A$$

Absorción

$$A \cap E = A \quad \text{Si } E \in A$$

7. Diferencia de sucesos

La **diferencia de sucesos, A − B**, es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.

Es decir, la **diferencia de los sucesos** A y B se verifica cuando lo hace A y no B.

A − B se lee como "**A menos B**".

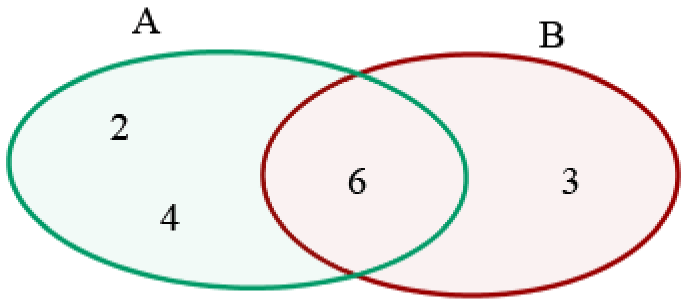
Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular A − B.

A = {2, 4, 6}

B = {3, 6}

A − B = {2, 4}



8. Sucesos contrarios

El suceso Ā **= E - A** se llama **suceso contrario** o complementario de A.

Es decir, se verifica siempre y cuando no se verifique A.

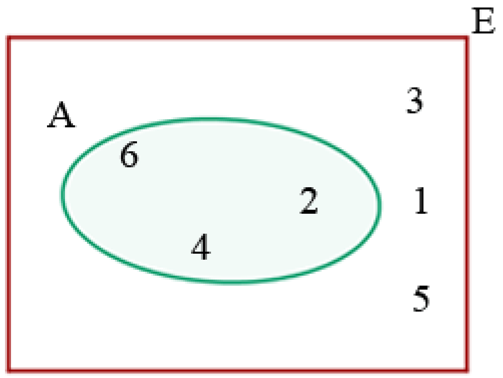
Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par".

Calcular Ā

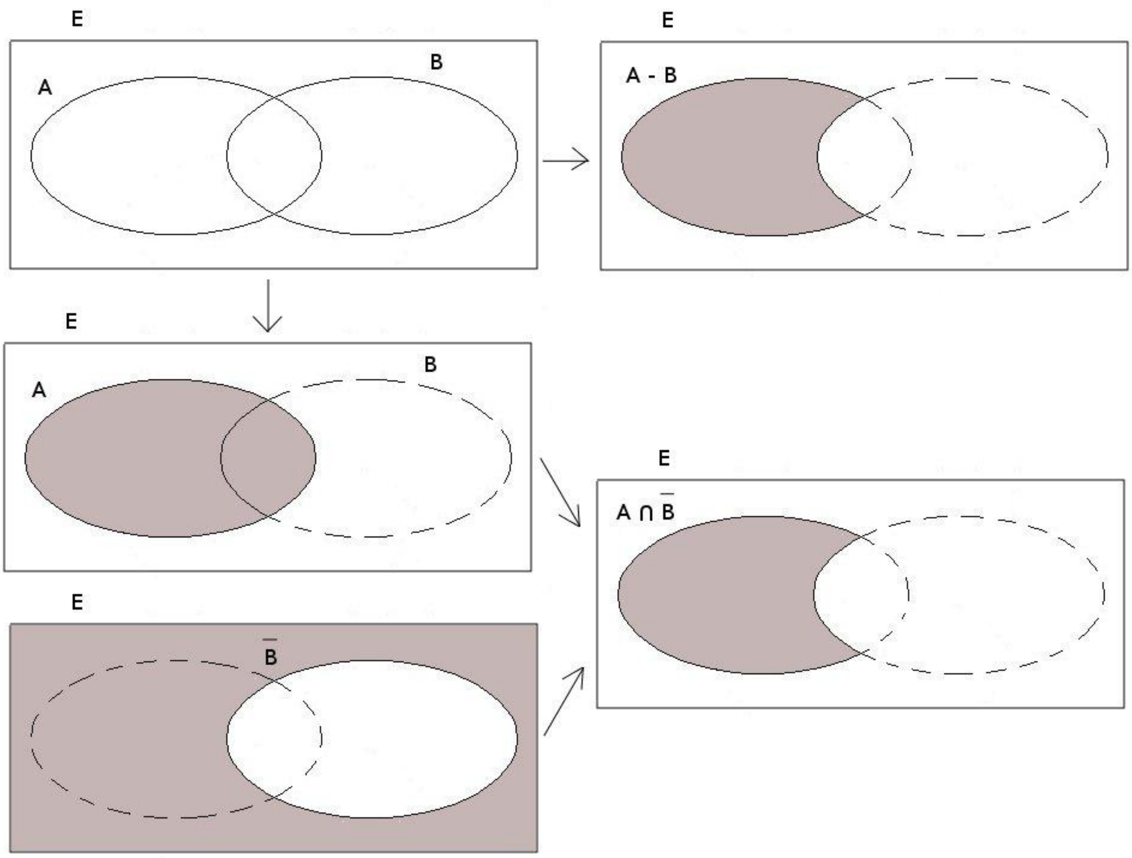
A = {2, 4, 6}

Ā= {1, 3, 5}



8.1. Propiedades

$$A - B = A \cap \overline{B}$$



$$\overline{(\overline{A})} = A$$

$$\overline{E} = \varnothing$$

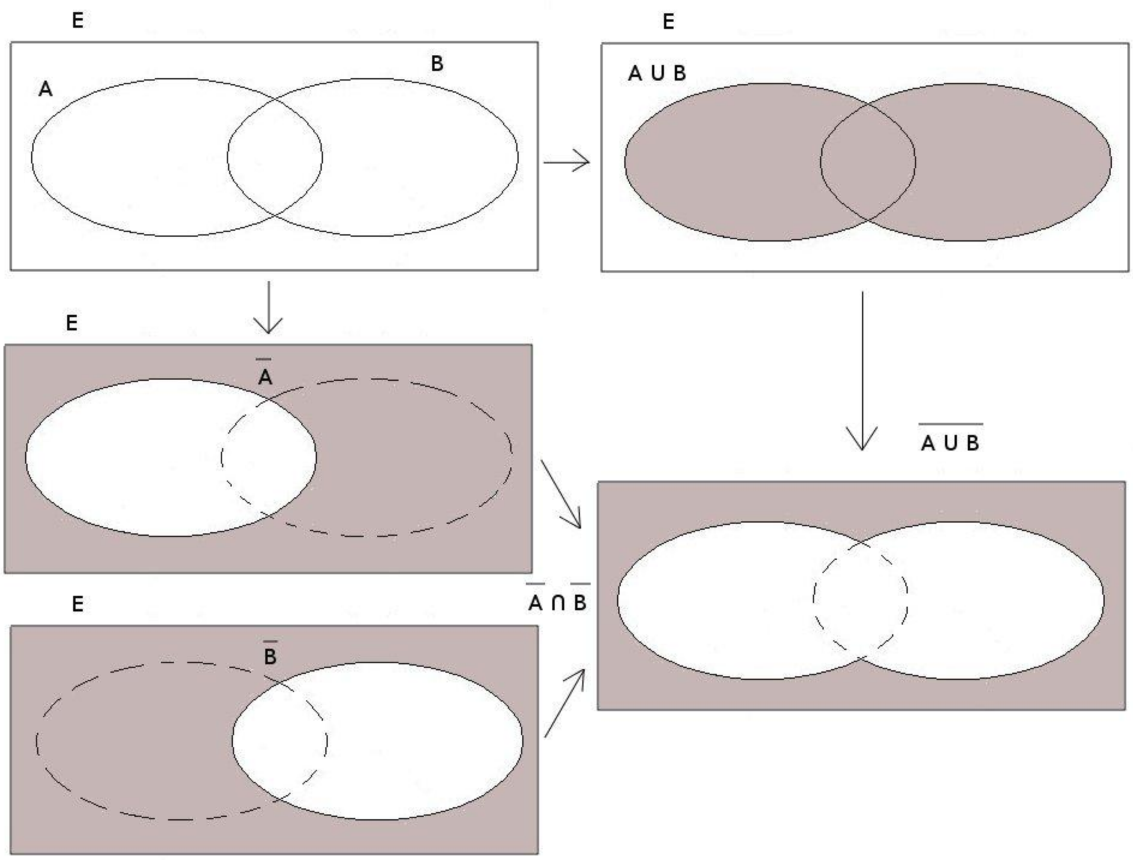
$$\overline{\varnothing} = E$$

$$A \cup \overline{A} = E$$

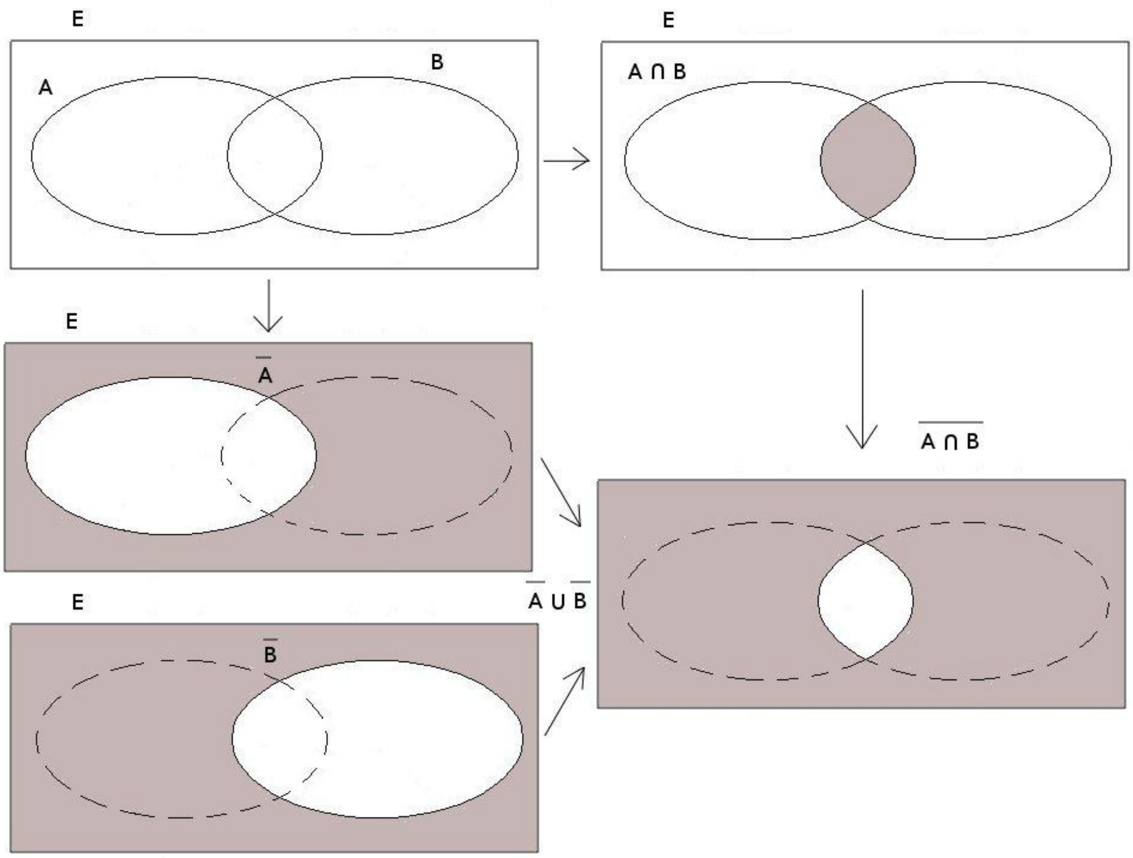
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

Leyes de Morgan

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



9. Axiomas y Propiedades de la probabilidad

9.1. Axiomas de la probabilidad

1. La probabilidad es positiva y menor o igual que 1.

$0 \leq p(A) \leq 1$

2. La probabilidad del suceso seguro es 1.

$p(E) = 1$

3. Si A y B son incompatibles, es decir $A \cap B = \emptyset$ entonces:

$P(A \cup B) = p(A) + p(B)$

9.2. Propiedades de la probabilidad

1 La suma de las probabilidades de un suceso y su contrario vale 1, por tanto la probabilidad del suceso contrario es:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

2 Probabilidad del suceso imposible es cero.

$$p(\emptyset) = 0$$

3 La probabilidad de la unión de dos sucesos es la suma de sus probabilidades restándole la probabilidad de su intersección.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

4 Si un suceso está incluido en otro, su probabilidad es menor o igual a la de éste.

$$Si\ \ A \subset B, \text{entonces} \qquad p(A) \leq p(B)$$

5 Si A_1, A_2 , ..., A_k son incompatibles dos a dos entonces:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_k)$$

6 Si el espacio muestral E es finito y un suceso es S = {x_1, x_2 , ..., x_n} entonces:

$$p(S) = p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n)$$

10. Regla de Laplace

En un experimento aleatorio se pueden dar dos situaciones:

· Que conozcamos de antemano, o a priori, los resultados que pueden darse: por ejemplo en al caso del lanzamiento de una moneda, experimento en el que sólo puede obtenerse cara o cruz. En estos casos se dice que la asignación de probabilidades se realiza “a priori”.

· Que desconozcamos a priori los resultados que pueden darse: por ejemplo, en el experimento “contar los coches que echan gasolina en una determinada estación de servicio de 9 a 10 de la mañana”, evidentemente no sabemos de antemano cuantos valores pueden darse ya que pueden ser tres coches, cuatro o treinta. Para asignar probabilidades en estos experimentos es preciso tomar muchos datos, diciéndose que la asignación de probabilidades se realiza a posteriori.

En este nos referiremos a la asignación de probabilidades “a priori”
Regla de Laplace

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, **equiprobables**, entonces si A es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplos

Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salgan dos caras.

Casos posibles: {cc, cx, xc, xx}.

Casos favorables: 1.

$$P(2\ \text{caras}) = \frac{1}{4}$$

11. Probabilidad de la unión de sucesos

Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles:

La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles, es decir tales que $A \cap B = \varnothing$, es la suma de las probabilidades.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Ejemplo: Calcular la probabilidad de obtener un 2 ó un 5 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad de la unión de sucesos compatibles:

La probabilidad de la unión de sucesos compatibles, es decir tales que $A \cap B \neq \varnothing$, es la suma de las probabilidades menos la probabilidad del suceso intersección:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Además la probabilidad de la unión de tres sucesos es:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo: Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

12. Diagramas de árbol

Para la construcción de un **diagrama en árbol** se partirá poniendo una **rama** para cada una de las **posibilidades**, acompañada de su **probabilidad**.

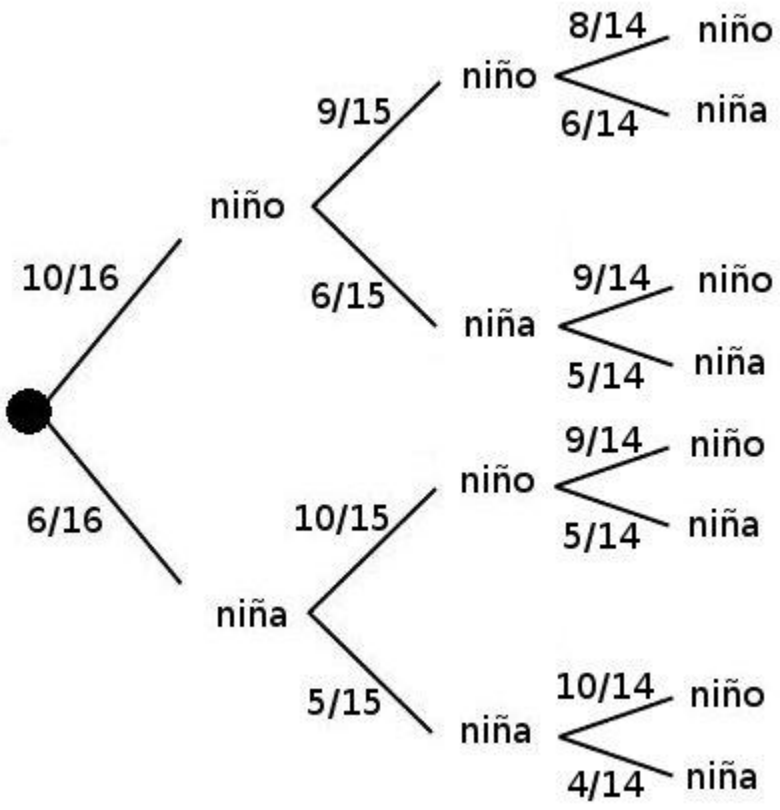
En el **final** de cada **rama parcial** se constituye a su vez, un **nudo** del cual parten nuevas **ramas**, según las **posibilidades** del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (**nudo final**).

Hay que tener en cuenta: que la **suma de probabilidades** de las **ramas** de cada **nudo** ha de dar **1**.

Ejemplos

Una clase consta de seis niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:

1. Seleccionar tres niños.
2. Seleccionar exactamente dos niños y una niña.
3. Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.
4. Seleccionar tres niñas.



Podemos ahora contestar a los diferentes apartados:

1. $p(\textit{3 niños}) = \frac{10}{16}.\frac{9}{15}.\frac{8}{14} = 0.214$

2. $p(\textit{2 niños y una niña}) = \frac{10}{16}.\frac{9}{15}.\frac{6}{14}+\frac{10}{16}.\frac{6}{15}.\frac{9}{14}+\frac{6}{16}.\frac{10}{15}.\frac{9}{14} = 0.482$

3. $p(\textit{2 niñas y un niño}) = \frac{10}{16}.\frac{6}{15}.\frac{5}{14}+\frac{6}{16}.\frac{10}{15}.\frac{5}{14}+\frac{6}{16}.\frac{5}{15}.\frac{10}{14} = 0.268$

4. $p(\textit{tres niñas}) = \frac{6}{16}.\frac{5}{15}.\frac{4}{14} = 0.0357$