Tema 1.- Expresiones algebraicas. Ecuaciones y lenguaje algebraico

1.-Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es aquella en la que se utilizan letras, números y signos de operaciones para reflejar de forma generalizada la relación que existe entre varias magnitudes y poder realizar un cálculo de esa relación en función de los valores que tomen las diferentes magnitudes.

Ejemplo:
Perímetro: **2x + 2y**;
Área: **x · y**

1.1. Valor numérico de una expresión algebraica

Si en una expresión algebraica se sustituyen las letras por número y se realiza la operación indicada se obtiene un número que es el "**valor numérico**" de la expresión algebraica para los valores de las letras dados.

En el ejemplo anterior, si el largo del terreno fueran 50 m (**x = 50)** y el ancho 30 m (**y = 30**), el valor numérico sería:

Perímetro = **2 · 50 + 2 · 30** = 100 + 60 = 160 m
Área = **50 · 30** = 1500 m^2

1.2. Monomios

Un **monomio** es una **expresión algebraica** en la que las únicas **operaciones** que aparecen entre las variables son el **producto y la potencia de exponente natural**.

Ejemplos: $2x^2 y^3 z$ $2x^2$ $3xy$

Partes de un monomio

Coeficiente

El **coeficiente** del **monomio** es el número que aparece multiplicando a las variables.

Parte literal

La **parte literal** está constituida por las letras y sus exponentes.

Grado

El **grado** de un **monomio** es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

El **grado** de $2x^2 y^3 z$ es: $2 + 3 + 1 = 6$

Ejemplo:

Monomio	Coeficiente	Literal	Grado
$3axy^2$	3	axy^2	4
$-5z^3$	-5	z^3	3
$-4x$	-4	x	1
x^3y^3	1	x^3y^3	6

1.2.1. Monomios semejantes

Son **monomios semejantes** entre sí aquellos que tienen la misma parte literal con los mismos exponentes.
Ejemplo.- Son monomios semejantes: $\mathbf{2ax^4y^3}$; $\mathbf{-3ax^4y^3}$; $\mathbf{ax^4y^3}$; $\mathbf{5ax^4y^3}$

1.2.2. Suma y resta de monomios

Para sumar o restar dos monomios **tienen que ser semejantes**.
La **suma o resta** es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma o diferencia, según el caso, de los coeficientes.

Ejemplo.

a) $2ax^4 - 3ax^4 + 5ax^4 = 7ax^4 - 3ax^4 = 4\,ax^4$

b) $2x^3 - x + x^3 + 3x^3 + 2x = 6x^3 + x$

1.2.3. Producto de monomios

Para **multiplicar monomios**, se multiplican los coeficientes de cada uno entre si y las potencias que tengan la misma base de cada uno, dejando las de distinta base como estén.

Ejemplo.

$\mathbf{4ax^4y^3 \cdot x^2y \cdot 3ab^2y^3}$

1.- Se multiplican los **coeficientes**: 4, 1 y 3 respectivamente. Resultado: **12**
2.- Se multiplican todas las **potencias de base a (sumando los exponentes)**. Resultado: $\mathbf{a^2}$
3.- Se multiplican todas las **potencias de base b**. Resultado: $\mathbf{b^2}$
4.- Se multiplican todas las **potencias de base x**. Resultado: $\mathbf{x^6}$
5.- Se multiplican todas las **potencias de base y**. Resultado: $\mathbf{y^7}$

Resultado final

$$4ax^4y^3 \cdot x^2y \cdot 3ab^2y^3 = 12a^2b^2x^6y^7$$

1.3. Polinomios

1.3.1. Definición y ejemplos de polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica que se obtiene al expresar cualquier suma de monomios no semejantes.

Ejemplo.- Son polinomios las expresiones siguientes:

a) $4ax^4y^3 + x^2y + 3ab^2y^3$

b) $4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$

En el primer caso el polinomio consta de la suma de tres monomios, cada uno de ellos es un **término** del polinomio. Por lo tanto, este polinomio tiene tres términos, cada uno con varias letras.
En el segundo caso, el polinomio tiene 5 términos. Si un término sólo consta de un número se le llama **término independiente:** 5 en el caso b) y 0 (no existe) en el caso a)

Cuando un polinomio consta de dos monomios se denomina **binomio**

$$x^2y + 3aby^2$$

$$2x + 3$$

Cuando consta de tres monomios se denomina **trinomio**

$$2x^3 + 3x^2 + 5$$

1.3.2. Suma y resta de polinomios

La suma de polinomios se basa en la de monomios ya vista en este tema. Se podrán sumar los términos (monomios) que sean semejantes de los polinomios objeto de la suma.
Ejemplo

$$\begin{array}{rrrrr} 4x^4 & -2x^3 & +3x^2 & \cancel{-2x} & +5 \\ & 5x^3 & -x^2 & \cancel{+2x} & \\ \hline \mathbf{4x^4} & \mathbf{+3x^3} & \mathbf{+2x^2} & & \mathbf{+5} \end{array}$$

Para **sumar** dos o más polinomios se suman los términos semejantes de cada uno de ellos.

*Si en lugar de sumar dos polinomios se tratara de **restarlos**, debemos **sumar al primero el opuesto del segundo**; es decir, bastaría **cambiar el signo a todos los términos del segundo** y sumar los resultados.*
Ejemplo

$$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) - (5x^3 - x^2 + 2x)$$

$$\begin{array}{rrrrr} 4x^4 & -2x^3 & +3x^2 & -2x & +5 \\ & -5x^3 & +x^2 & -2x & \\ \hline \mathbf{-4x^4} & \mathbf{-7x^3} & \mathbf{+4x^2} & \mathbf{-4x} & \mathbf{+5} \end{array}$$

1.3.3. Producto de polinomios

Para **multiplicar** dos polinomios se deben multiplicar todos los monomios de unos por todos los del otro y sumar los resultados. ("Atención especial al producto de potencias de la misma base").

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrr} 2x^3 & -3x^2 & & +1 & \\ & & & 2x & -3 \\ \hline & -6x^3 & +9x^2 & & -3 \\ 4x^4 & -6x^3 & & +2x & \\ \hline 4x^4 & -12x^3 & +9x^2 & +2x & -3 \end{array}$$

1.3.4. División de polinomios

La división de polinomios, en general se realiza de forma semejante a la de números de varias cifras, aunque las operaciones que realizamos rápidamente con los números, con los polinomios las vamos indicando.

Ejemplo

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 \quad +3x-2 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+6x^2 & 2x^2+6x+21 \\ \cline{1-1} \quad 6x^2+3x-2 & \\ \quad -6x^2+18x & \\ \cline{1-1} \qquad 21x-2 & \\ \qquad -21x+63 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 61 & \end{array}$$